Inégalités de Bernstein et Markov

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie **1** et questions **1)** à **3)** de la partie **2**.

— Piste rouge : partie **2** (avec la partie **1** éventuellement).

1 Fonctions plateaux

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et on va prouver qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier.

a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme P_n pour lequel $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x > 0$.

b) Étudier $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis conclure proprement.

2) On note g la fonction $x \longmapsto f(x)f(1-x)$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de son graphe.

3) Continue sur $\mathbb{R}$, g possède des primitives d'après le théorème fondamental du calcul intégral — momentanément admis. On note G son unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) Montrer que $G(1) > 0$, puis étudier les variations de la fonction $x \overset{H}{\longmapsto} \dfrac{G(x)}{G(1)}$ sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de son graphe.

b) En déduire l'existence d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ positive sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ et de valeur 1 sur $[-1, 1]$.

De telles fonctions, dites *fonctions plateaux*, sont d'une grande utilité en analyse et vous en rencontrerez peut-être quelques-unes en deuxième année.

2 Inégalités de Bernstein et Markov

On se donne une fois pour toutes un entier naturel non nul n. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des *polynômes trigonométriques réels de degré inférieur ou égal à* n, i.e. des fonctions $x \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$, $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ décrivant $\mathbb{R}$.

1) **a)** Montrer que $\mathscr{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{P}_n$ est stable par dérivation et par translation, i.e. que pour tous $f \in \mathscr{P}_n$ et $m \in \mathbb{R}$, $\mathscr{P}_n$ contient les fonctions f' et $x \longmapsto f(x+m)$.

c) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}_n$, il existe un (vrai) polynôme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ pour lequel $f(x) = e^{-inx} P\big(e^{ix}\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité de Bernstein) Pour toute fonction $f \in \mathscr{P}_n$: $\|f'\|_\infty \leqslant n\,\|f\|_\infty$, où les normes infinies sont calculées sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Dans les questions **2)** et **3)**, les normes infinies sont calculées sur $\mathbb{R}$ tout entier. On fixe $f \in \mathscr{P}_n$.

2) Justifier l'existence des réels $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ et montrer que $|f'|$ possède un maximum sur $\mathbb{R}$.

On note m un réel en lequel $|f'|$ atteint son maximum et φ la fonction $x \longmapsto \dfrac{f'(m)}{n} \sin(nx) - f(x+m)$.

3) Raisonnant par l'absurde, on fait l'hypothèse que $\|f'\|_\infty > n\,\|f\|_\infty$.

a) Montrer que $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = \varphi''(0) = 0$.

b) En quels points la fonction $x \longmapsto \sin(nx)$ est-elle maximale ou minimale sur $\mathbb{R}$? En déduire que φ s'annule au moins $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$.

c) Montrer que φ'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$.

d) Justifier l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ pour lequel $\varphi''(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, Q\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

e) En déduire que φ est la fonction nulle, puis conclure.

On s'intéresse dans un deuxième temps à une conséquence de l'inégalité de Bernstein.

Théorème (Inégalité de Markov) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\quad \|P'\|_\infty \leqslant n^2 \|P\|_\infty, \quad$ où les normes infinies sont calculées sur $[-1, 1]$.

Dans les questions qui suivent, les normes infinies sont calculées sur $[-1, 1]$. On fixe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé et on pose :

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} \big|P'(\cos x)\, \sin x\big|.$$

4) Montrer que la fonction $x \longmapsto P(\cos x)$ appartient à $\mathscr{P}_n$, puis que $M \leqslant n\, \|P\|_\infty$.

L'inégalité de Markov sera donc démontrée si on prouve que pour tout $x \in [0, \pi]$: $\quad \big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.

5) **a)** Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad \sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{(2n-1)\,\pi}{2n}\right]$: $\quad \big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.

On note à présent T_n le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*. On rappelle que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, que T_n est de degré n et que si on pose $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $T_n = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \big(X - \cos\theta_k\big)$.

6) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad \big|\sin(nx)\big| \leqslant n\,|\sin x|$.

b) En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad T_n'(\cos\theta_k) = \dfrac{(-1)^k\, n}{\sin\theta_k}$.

7) On note à présent $L_0, \ldots, L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange de $\cos\theta_0, \ldots, \cos\theta_{n-1}$.

a) Montrer que : $\quad P' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P'(\cos\theta_k)\, L_k \quad$ et $\quad T_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T_n'(\cos\theta_k)\, L_k$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad T_n = T_n'(\cos\theta_k)\big(X - \cos\theta_k\big)\, L_k$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi] \setminus \big\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\big\}$:

$$P'(\cos x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \cos(nx)}{\cos x - \cos\theta_k}\, P'(\cos\theta_k)\, \sin\theta_k \qquad \text{et} \qquad T_n'(\cos x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(nx)}{\cos x - \cos\theta_k}.$$

d) Montrer enfin que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right[\cup \left]\dfrac{(2n-1)\,\pi}{2n}, \pi\right]$: $\quad \big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.